行星摄动方程的非微扰修正*

陈驰一[1]
[1]（杭州师范大学物理学院 杭州 310036）

摘要：本文简要介绍新的对称形式的质点动力学方程对天体动力学理论的系统性改进。首先，对于开放的多体系统，无法找到近似程度非常高的惯性系，在传统理论中不得不引入惯性系的近似，而对称新方程因为可以直接适用于任意的平动参考系而避免了惯性系的近似，从而可以提高理论预言的精度。其次，对于束缚的多体系统，传统理论的动力学应用是先引入质心参考系，在质心参考系中应用牛顿第二定律，然后通过坐标变换再转化到实体参考系，比如太阳系的行星摄动方程。 但是，应用对称新方程则可以一步到位推导得到行星摄动方程。最后，如果进一步考虑行星受到临时推力或者冲击力，甚至为了进一步提高计算精度进而考虑来自束缚系统外的作用力，则一个可以叠加非微扰作用力的行星摄动的修正方程在本文得到了确立。
关键词：天体动力学　非微扰修正　对称新方程　行星摄动方程
分类号：P13

Non-perturbative corrections to the planetary perturbation equation

Chen ChiYi[1]
[1](School of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou, Zhejiang 311121, China)

Abstract: This article presents a brief introduction to a systematic improvement in celestial dynamics theory through the introduction of a new symmetrical form of particle dynamics equation. For open multi-body systems where it is challenging to find a highly accurate inertial reference frame, approximations of inertial frames need to be introduced. However, the new symmetric equation can be applied to any translational reference frame, thus avoiding the need for inertial reference frame approximations and enhancing the accuracy of theoretical predictions. In the case of bound multi-body systems, the traditional approach involves introducing a center of mass reference frame, applying Newton's second law in this frame, and then transforming it back to the actual reference frame, such as the perturbation equation of the solar system's planets. Conversely, applying the new symmetric equation allows for the direct derivation of planetary perturbation equations. Furthermore, by considering temporary thrust or impact forces acting on planets, or to further enhance computational precision, even considering any external forces acting on the bound system, then a new correction equation has been established for the planetary perturbation equation that can be further imposed with non-perturbative interactions.
Keywords: Celestial dynamics　Non-perturbative correction　New symmetric equation　Planetary perturbation equation

---

* 本文系中科院知识创新工程基金项目（项目编号：KJCX2-YW-W10）的研究成果之一。

1 引言

传统天体动力学的理论基础是牛顿第二定律，而牛顿第二定律的适用条件是惯性参考系。仅以此为基础，实际上可以严格推导出一个对称形式的质点动力学方程[1,2]。在理论上假定宇宙中存在某一个惯性系Σ，待考察的运动天体为p， 任意选取一个实际的天体为参考物o，原则上我们可以运用牛顿第二定律求出这两个天体相对于惯性系Σ的加速度，分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\big|_p &= m_p\,\boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma} \\ \boldsymbol{F}\big|_o &= m_o\,\boldsymbol{a}\big|_{o-\Sigma} \end{aligned} \tag{1}$$

为了展现形式上的对称性，上式又可以写成，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma} &= \frac{\boldsymbol{F}\big|_p}{m_p} \\ \boldsymbol{a}\big|_{o-\Sigma} &= \frac{\boldsymbol{F}\big|_o}{m_o} \end{aligned} \tag{2}$$

显然在同一个惯性系Σ中，根据牵连加速度、相对加速度、绝对加速度之间的伽利略变换关系[3]，可得

$$\boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma} - \boldsymbol{a}\big|_{o-\Sigma} = \left(\boldsymbol{a}\big|_{p-o}\right)_\Sigma \tag{3}$$

现在以 o为参考原点， 建立相对宇宙空间背景无旋转的参考系，即平动参考系标记为O（为了区分，这里约定平动参考系及其参考质点分别由对应的大写英文字母和小写英文字母标记）。考虑到惯性系在定义上也是相对宇宙空间背景无旋转的，则有

$$\left(\boldsymbol{a}\big|_{p-o}\right)_\Sigma = \boldsymbol{a}\big|_{p-O} \tag{4}$$

我们将式(2)(3)(4)进行联立，得

$$\frac{\boldsymbol{F}\big|_p}{m_p} - \frac{\boldsymbol{F}\big|_o}{m_o} = \boldsymbol{a}\big|_{p-O} \tag{5}$$

此即新近引入的对称形式的质点动力学方程（下面简称为对称新方程），其中蕴含的物理意义和多重推导已经有详细的讨论[1,2]。本文则重点展示其在天体动力学的应用优势。显然，对于开放的多体系统，应用牛顿第二定律的传统策略就是把宇宙天体中的某一个参考系近似为惯性系。比如研究太阳和月球的相对运动时把日心参考系近似为惯性系[4]，这种方案，即便近似程度再高也注定会带来一定的误差。针对这种由于理论本身的适用范围带来的误差，应用对称新方程来直接求解非惯性系下的天体动力学，既简化了步骤， 又取消了惯性系近似带来的误差，从而精确了计算结果[2]。 当然在传统理论中，对于束缚的系统（即忽略外部受力的近孤立系统），还存在一种更精确求解某个天体动力学的方案。 比如考察整个太阳系内某一个行星受到的除太阳之外的其他行星的引力扰动，存在著名的行星摄动的微分方程。 接下来本文即利用对称新方程重新考察行星摄动的微分方程的推导和修正。

2 传统行星摄动方程的验证性推导

以近孤立的任意多体系统为例，应用对称新方程重新推导行星摄动微分方程[5-8]。在经典的太阳系 n 体问题中，设n为太阳，其他 n-1 个天体为行星。直接引入太阳实体参考系，直接设第i个行星$(i<n)$在日心参考系中的坐标为(x_i,y_i,z_i)。根据对称新方程(5)，任意第i个行星相对日心参考系 （参考质点为n，故对应平动参考系为N）的加速度满足

$$\frac{\boldsymbol{F}|_i}{m_i}-\frac{\boldsymbol{F}|_n}{m_n}=\boldsymbol{a}|_{i-N} \tag{6}$$

把这个矢量方程分解成(x,y,z)三个方向的分量方程，我们取x方向的方程进行接下来的推导

$$\ddot{x}_i=\frac{F_x|_i}{m_i}-\frac{F_x|_n}{m_n} \tag{7}$$

本节暂且假定只考虑太阳系内引力相互作用，则根据万有引力定律，我们可以得到$F_x|_i,F_x|_n$，即

$$\begin{aligned}F_x|_i&=\sum_{j=1\ldots n}^{i\neq j}\frac{Gm_im_j\left(x_j-x_i\right)}{\Delta_{ij}^3}\\F_x|_n&=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{Gm_nm_j\left(x_j-x_n\right)}{\Delta_{nj}^3}\end{aligned} \tag{8}$$

只要将具体受力公式(8)代入对称新方程的分量形式(7)式，立刻就得

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i&=\sum_{j=1\ldots n}^{i\neq j}\frac{Gm_j\left(x_j-x_i\right)}{\Delta_{ij}^3}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{Gm_j\left(x_j-x_n\right)}{\Delta_{nj}^3}=\left[\sum_{j=1\ldots n-1}^{i\neq j}\frac{Gm_j\left(x_j-x_i\right)}{\Delta_{ij}^3}+\frac{Gm_n\left(x_n-x_i\right)}{\Delta_{in}^3}\right]-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{Gm_j\left(x_j-x_n\right)}{\Delta_{nj}^3}\\&=\sum_{j=1\ldots n-1}^{i\neq j}\frac{Gm_j\left(x_j-x_i\right)}{\Delta_{ij}^3}-\frac{G\left(m_n+m_j\right)x_i}{r_i^3}-\sum_{j=1\ldots n-1}^{i\neq j}\frac{Gm_jx_j}{r_j^3}\end{aligned} \tag{9}$$

按照惯例，现在引入直接包含第三方天体参数（所有带指标j的参数）的摄动函数R_{ij}[5,8]，其定义为

$$R_{ij}\equiv Gm_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}}-\frac{x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j}{r_j^3}\right) \tag{10}$$

将（10）代入（9）式可得

$$\ddot{x}_i+G\frac{\left(m_i+m_n\right)x_i}{r_i^3}=\sum_{j=1\ldots n-1}^{i\neq j}\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} \tag{11}$$

对 y 和 z 方向的方程也可以进行和上式类似的推导。此即为天体力学中行星摄动的基本微分方程[5-8]。因此，对称新方程(5)在经典力学框架下的正确性由此再次得到了验证。但是由于对称新方程对惯性系依赖的规避，使得推导过程一步到位，具体解题过程可以得到有效的简化。

3 行星摄动方程的非微扰修正

在上一节的推导中，实际上假定 n 个天体都只受到系统内其他天体的引力相互作用，但是在实际情况下，天体可能受到其他非引力相互作用的影响。更需指出的一点是，行星摄动方程的推导经由质心参考系来引入牛顿第二定律，看似精确， 但是实质上是在更高层次上对惯性系作了近似， 即把所考察的整个天体束缚系统的质心参考系近似为了惯性系，因此，在特殊情况下为了更高的精度，有必要考虑来自 n 体束缚系统之外的作用力。有了对称新方程(5)， 这个问题可以得到简洁严格的理论解决方案。

假定第 i 个天体，受到的引力相互作用标记为 $\boldsymbol{f}_{引}\big|_i$， 而受到的任意来源的非引力相互作用标记为 $\boldsymbol{f}_{非引}\big|_i$，受到的束缚系统之外的作用力统一标记为 $\boldsymbol{f}_{系外}\big|_i$，因此，第(6)式可以改写为

$$\frac{\left(\boldsymbol{f}_{引}\big|_i+\boldsymbol{f}_{非引}\big|_i+\boldsymbol{f}_{系外}\big|_i\right)}{m_i}-\frac{\left(\boldsymbol{f}_{引}\big|_n+\boldsymbol{f}_{非引}\big|_n+\boldsymbol{f}_{系外}\big|_n\right)}{m_n}=\boldsymbol{a}\big|_{i-N} \tag{12}$$

重复从方程(7)至方程(11)的推导， 不难得到 x 方向的动力学满足

$$\ddot{x}_i=\sum_{j=1\ldots n-1}^{i\neq j}\frac{Gm_j\left(x_j-x_i\right)}{\Delta_{ij}^3}-\frac{G\left(m_n+m_j\right)x_i}{r_i^3}-\sum_{j=1\ldots n-1}^{i\neq j}\frac{Gm_jx_j}{r_j^3}+\left[\frac{\left(\boldsymbol{f}_{非引}\big|_i+\boldsymbol{f}_{系外}\big|_i\right)}{m_i}-\frac{\left(\boldsymbol{f}_{非引}\big|_n+\boldsymbol{f}_{系外}\big|_n\right)}{m_n}\right] \tag{13}$$

同样引入摄动函数 R_{ij} 之后，叠加了非微扰作用力之后的行星摄动微分方程修正为

$$\ddot{x}_i+G\frac{\left(m_i+m_n\right)x_i}{r_i^3}=\sum_{j=1\ldots n-1}^{i\neq j}\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i}+\left[\frac{\left(\boldsymbol{f}_{非引}\big|_i+\boldsymbol{f}_{系外}\big|_i\right)}{m_i}-\frac{\left(\boldsymbol{f}_{非引}\big|_n+\boldsymbol{f}_{系外}\big|_n\right)}{m_n}\right] \tag{14}$$

其中对于非引力相互作用， 可以是火箭的推动力， 也可以是爆炸等破坏力，因此，上述方程(14)在人为改变小行星轨道的理论计算中可能有一定的作用。

4 总结与展望

本文调用了新近引入的对称形式的质点动力学方程研究了其在天体动力学的理论改进。对称新方程可以根据理论上存在的惯性系从牛顿第二定律严格地推导得到，本文证明其在多体系统的应用方面具备不可忽视的优势。对于一般的开放性多体系统，可以因为避免惯性系的近似而提高计算的精度。对于束缚的近孤立多体系统， 对称新方程可以有效简化对行星摄动方程的推导；在此基础上，进一步考虑行星的临时新增受力或者深究来自系外的作用力， 则得到了行星摄动的非微扰修正方程。

参考文献:

[1] 陈驰一. 经典质点动力学方程的形式探讨[J].浙江大学学报（理学版）,2014,41（05）:531-536. Chen, Y. （2014）. A Study on the Form of Classical Particle Dynamics Equations. Journal of Zhejiang University （Science Edition）, 41（05）, 531-536. （in Chinese）

[2] Chen, C.Y.: Generalized dynamics equation with causal symmetry, Journal of Mechanics, 2024, 40:149–154, https://doi.org/10.1093/jom/ufae012.

[3] 程守洙，江之永. 普通物理学[M]. 高等教育出版社第六版，2006. 1-10. Cheng, Shouzhu; Jiang, Zhiyong. General Physics. 6th ed. Higher Education Press, 2006. pp. 1-10. （in Chinese）

[4] 牛晓平,时建群.在地心参考系中研究太阳和月亮的运动[J].河南师范大学学报（自然科学版）,2007（02）:190-192. Niu Xiaoping, Shi Jianqun. Research on the movement of the sun and moon in the geocentric reference frame. Journal of Henan Normal University （Natural Science Edition）, 2007（02）:190-192. （in Chinese）

[5] 易照华.天体力学教程[M].上海科学技术出版社,1961. Yi Zhaohua. Celestial Mechanics Tutorial. Shanghai Science and Technology Press, 1961. （in Chinese）

[6] 易照华.天文动力学和天体力学[J].云南天文台台刊,2002（03）:1-8. Yi Zhaohua. Celestial Mechanics and Astrodynamics [J]. Yunnan Observatory Journal, 2002（03）: 1-8. （in Chinese）

[7] 刘林. 天体力学与航天器轨道力学 [C]. 一般力学（动力学、振动及控制）发展与展望学术讨论会 . 1994. Liu Lin. Celestial Mechanics and Spacecraft Orbital Mechanics [C]. Academic Symposium on the Development and Prospects of General Mechanics （Dynamics, Vibration, and Control）. 1994. （in Chinese）

[8] 刘林. 天体力学方法[M]..南京大学出版社.1998. Liu Lin. Celestial Mechanics [M]. Nanjing University Press. 1998. （in Chinese）

(通讯作者: 陈驰一 E-mail:chenchiyi@hznu.edu.cn)